Áreas

9

9.1 ÁREA DE UN RECTÁNGULO Y DE UN CUADRADO

Una *unidad cuadrada* es la superficie encerrada por un cuadrado cuyo lado es 1 unidad (Fig. 9-1).

El *área de una superficie cerrada*, tal como la de un polígono, es el número de unidades cuadradas contenidas en su superficie. Como un rectángulo con 5 unidades de largo y 4 unidades de ancho se puede dividir en 20 unidades cuadradas, su área es de 20 unidades cuadradas (Fig. 9-2).

El *área de un rectángulo es igual al producto de la longitud de su base y la longitud de su altura* (Fig. 9-3). Así, si $b = 8$ pulgadas y $h = 3$ pulgadas, entonces $A = 24$ pulg^2.

El *área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de un lado.* (Fig. 9-4). Si $s = 6$, entonces $A = s^2 = 36$.

Se deduce que el área de un cuadrado también es igual a la mitad del cuadrado de la longitud de su diagonal. Como $A = s^2$ y $s = d/\sqrt{2}$, $A = \frac{1}{2}d^2$.

Nótese que, en ocasiones, se utiliza la letra A para ambos; el vértice de una figura y su área. No se tendrá dificultad en determinar a cuál se refiere.

Fig. 9-1

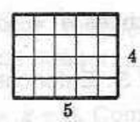
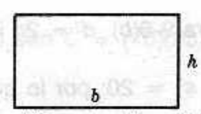
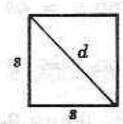


Fig. 9-2



Rectángulo: $A = bh$

Fig. 9-3



Cuadrado: $A = s^2$

$A = \frac{1}{2}d^2$

Fig. 9-4

PROBLEMAS RESUELTOS

9.1 ÁREA DE UN RECTÁNGULO

(*a*) Calcule el área de un rectángulo, si su base tiene longitud 15 y el perímetro es 50.

(*b*) Determine el área de un rectángulo, si su altura tiene longitud 10 y la diagonal tiene longitud 26.

(*c*) Calcule las longitudes de la base y altura de un rectángulo, si su área es 70 y su perímetro es 34.

Soluciones

Véase figura 9-5.

(*a*) Aquí, $p = 50$ y $b = 15$. Como $p = 2b + 2h$, se tiene $50 = 2(15) + 2h$, así $h = 10$. Por lo que $A = bh = 15(10) = 150$.

(*b*) Aquí, $d = 26$ y $h = 10$. En el $\triangle$ rectángulo ACD, $d^2 = b^2 + h^2$, de modo que $26^2 = b^2 + 10^2$ o $b = 24$. Por lo que $A = bh = 24(10) = 240$.

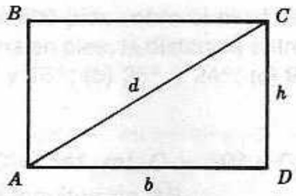


Fig. 9-5

(*c*) Aquí, $A = 70$ y $p = 34$. Como $p = 2b + 2h$, se tiene $34 = 2(b + h)$ ó $h = 17 - b$. Como $A = bh$, se tiene $70 = b(17 - b)$, así, $b^2 - 17b + 70 = 0$ y $b = 7$ ó 10. Entonces, como $h = 17 - b$, se obtiene $h = 10$ ó 7.
Resp. 10 y 7, ó 7 y 10.

9.2 Área de un Cuadrado

(*a*) Encuentre el área de un cuadrado cuyo perímetro es 30.

(*b*) Calcule el área de un cuadrado si el radio del círculo circunscrito es 10.

(*c*) Determine el lado y el perímetro de un cuadrado cuya área es 20.

(*d*) Calcule el número de pulgadas cuadradas en un pie cuadrado.

Soluciones

(*a*) Como $p = 4s = 30$ en la figura 9-6(*a*), $s = 7\frac{1}{2}$. Entonces $A = s^2 = (7\frac{1}{2})^2 = 56\frac{1}{4}$

(*b*) Como $r = 10$ en la figura 9-6(*b*), $d = 2r = 20$. Entonces $A = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}(20)^2 = 200$.

(*c*) En la figura 9-6(*a*), $A = s^2 = 20$; por lo que $s = 2\sqrt{5}$. Entonces el perímetro $= 4s = 8\sqrt{5}$.

(*d*) $A = s^2$. Como 1 pie = 12 pulgadas, 1 pie^2 = 1 pie × 1 pie = 12 pulgadas × 12 pulgadas = 144 pulgadas^2.

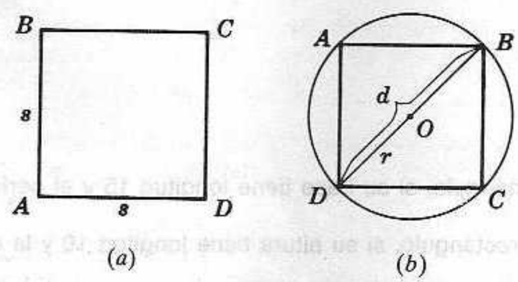
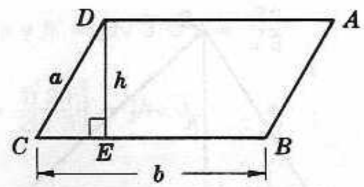


Fig. 9-6

9.2 ÁREA DE UN PARALELOGRAMO

El *área de un paralelogramo es igual al producto de la longitud de un lado y la longitud de la altura sobre el mismo lado*. (Se da una demostración de este teorema en el capítulo 16.) Entonces, en el $\square$ *ABCD* (Fig. 9-7), si $b = 10$ y $h = 2.7$, entonces $A = 10(2.7) = 27$.

El *área de un paralelogramo es igual al producto de las longitudes de dos lados adyacentes y el seno del ángulo entre ellos*. En el $\triangle DEC$, $h = a$ sen C; por lo que $A = bh = ab$ sen C.



Paralelogramo: $A = bh$
$A = ab$ sen C

Fig. 9-7

PROBLEMAS RESUELTOS

9.3 Área de un Paralelogramo

(*a*) Calcule el área de un paralelogramo si los lados de longitud 20 y 10 incluyen un ángulo que mide 59°. (Redondee la respuesta al entero más próximo).

(*b*) Determine el área de un paralelogramo si el área está representada por $x^2 + 4$, la longitud de un lado por $x + 4$, y la longitud de la altura sobre este lado por $x - 3$.

(*c*) En un paralelogramo, calcule la longitud de la altura si el área es 54 y la razón de la altura a la base es 2:3.

Soluciones

Véase figura 9-7

(*a*) $b = 20$, $a = 10$, $M\angle C = 59°$. Entonces $A = ab$ sen $C = (10)(20)$ sen $59° = 200(0.8572) = 171.44$. Así, $A = 171$, to the nearest integer.

(*b*) $A = x^2 - 4$, $b = x + 4$, $h = x - 3$. Como $A = bh$, $x^2 - 4 = (x + 4)(x - 3)$ o $x^2 - 4 = x^2 + x - 12$ y $x = 8$. Por lo que $A = x^2 - 4 = 64 - 4 = 60$.

(*c*) Sea $h = 2x$, $b = 3x$. Entonces $A = bh$ o $54 = (3x)(2x) = 6x^2$, así $9 = x^2$ y $x = 3$. Por lo que $h = 2x = 2(3) = 6$.

9.3 ÁREA DE UN TRIÁNGULO

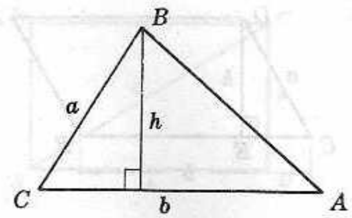
El *área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de un lado y la longitud de la altura sobre este lado.* (Este teorema se demuestra en el Capítulo 16.)

El *área de un triángulo es igual a la mitad del producto de las longitudes de dos lados adyacentes y el seno del ángulo que incluyen.* Así si $a = 25$, $b = 4$, y sen $C = 0.28$ en la figura 9-8, entonces $A = \frac{1}{2}(25)(4)(0.28) = 14$.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.4 Área de un Triángulo

Calcule, redondeando al entero más próximo, las áreas de los triángulos en la figura 9-9, donde (*a*) dos lados adyacentes de longitudes 15 y 8 incluyen un ángulo de 150°; (*b*) dos lados adyacentes de longitudes 16 y 5 incluyen un ángulo de 53°.



Triángulo: $A = \frac{1}{2}bh$

$A = \frac{1}{2}ab$ sen C

Fig. 9-8

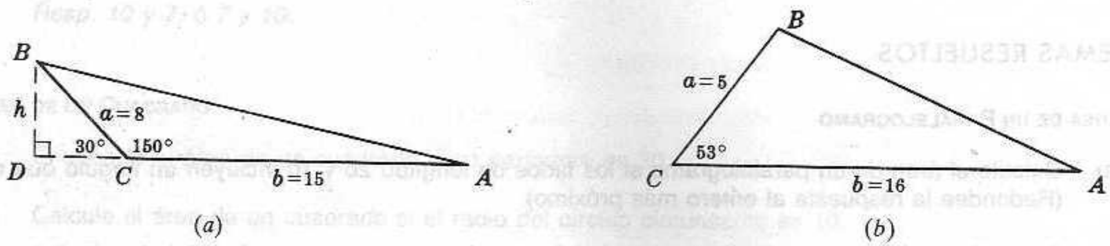


Fig. 9-9

Soluciones

(*a*) Aquí, $b = 15$ y $a = 8$. Como $m\angle BCA = 150°$, $m\angle BCD = 180° - 150° = 30°$.
En el $\triangle BCD$, h está opuesta al $\angle BCD$; por lo que $h = \frac{1}{2}a = 4$. Entonces, $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(15)(4) = 30$.

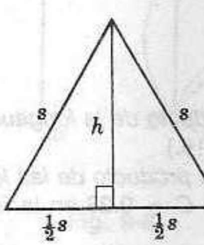
(*b*) Aquí, $a = 5$, $b = 16$, y $m\angle C = 53°$. Entonces, $A = \frac{1}{2}ab$ sen $C = \frac{1}{2}(5)(16)$ sen $53° = 40(0.7986) = 32$.

9.5 Fórmulas para el Área de un Triángulo Equilátero

Derive la fórmula para el área de un triángulo equilátero (*a*) cuyo lado tiene longitud s; (*b*) cuya altura tiene longitud h.

Soluciones

Véase figura 9-10.



Triángulo equilátero:

$A = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$

$A = \frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$

Fig. 9-10

(*a*) Aquí, $A = \frac{1}{2}bh$, donde $b = s$ y $h^2 = s^2 - (\frac{1}{2}s)^2 = \frac{3}{4}s^2$ ó $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$.
Entonces, $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s\sqrt{3}) = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$.

(*b*) Aquí, $A = \frac{1}{2}bh$, donde $b = s$ y $h = \frac{1}{2}s\sqrt{3}$ ó $s = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$.

Entonces, $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}sh = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2h}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$.

9.6 Área de un Triángulo Equilátero

En la figura 9-11, calcule el área de (*a*) un triángulo equilátero cuyo perímetro es 24; (*b*) un rombo en el cual la diagonal menor tiene longitud 12 y un ángulo mide 60°; (*c*) un hexágono regular con un lado de longitud 6.

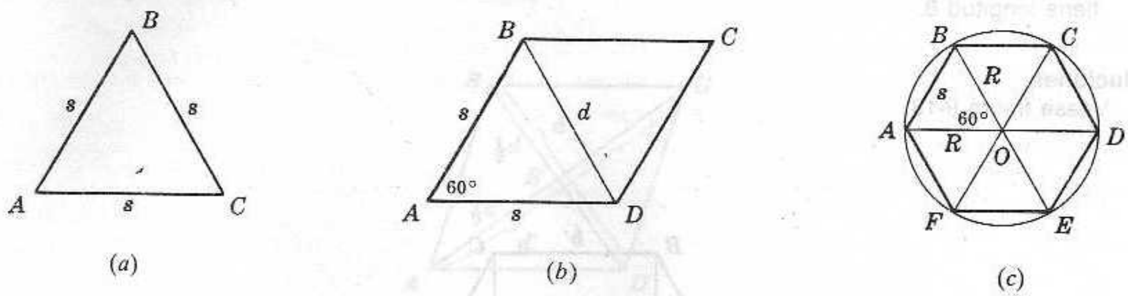


Fig. 9-11

Soluciones

(*a*) Como $p = 3s = 24$, $s = 8$. Entonces $A = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3} = \frac{1}{4}(64)\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

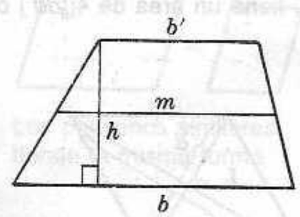
(*b*) Como $m\angle A = 60°$, $\triangle ABD$ es equilátero y $s = d = 12$. El área del rombo es dos veces el área del $\triangle ABD$. Por lo que $A = 2(\frac{1}{4}s^2\sqrt{3}) = 2(\frac{1}{4})(144)\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$.

(*c*) Un lado s de un hexágono inscrito produce un ángulo central que mide $\frac{1}{6}(360°) = 60°$. Entonces, como $OA = OB =$ radio R del círculo circunscrito, $m\angle OAB = m\angle OBA = 60°$. Así $\triangle AOB$ es equilátero. Área del hexágono $= 6$ (área de $\triangle AOB$) $= 6(\frac{1}{4}s^2\sqrt{3}) = 6(\frac{1}{4})(36\sqrt{3}) = 54\sqrt{3}$.

9.4 ÁREA DE UN TRAPEZOIDE

El área de un trapezoide es igual a la mitad del producto de la longitud de su altura y la suma de las longitudes de sus bases. (Este teorema se demuestra en el capítulo 16) Así, si $h = 20$, $b = 27$, y $b' = 23$ en la figura 9-12, entonces $A = \frac{1}{2}(20)(27 + 23) = 500$.

El área de un trapezoide es igual al producto de las longitudes de su altura y su mediana. Como $A = \frac{1}{2}h(b + b')$ y $m = \frac{1}{2}(b + b')$, $A = hm$.



Trapezoide: $A = \frac{1}{2}h(b + b')$
$A = hm$

Fig. 9-12

PROBLEMAS RESUELTOS

9.7 Área de un Trapezoide

(*a*) Calcule el área de un trapezoide si las bases tienen longitudes 7.3 y 2.7 y la altura tiene longitud 3.8.

(*b*) Encuentre el área de un trapezoide isósceles si las bases tienen longitudes 22 y 10 y los lados tienen longitud 10.

(*c*) Calcule las bases de un trapezoide isósceles si el área es $52\sqrt{3}$, la altura tiene longitud $4\sqrt{3}$ y cada lado tiene longitud 8.

Soluciones
Véase figura 9-13.

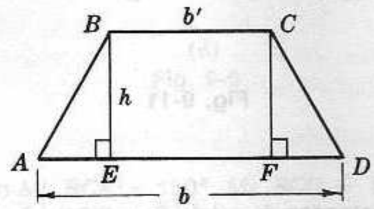


Fig. 9-13

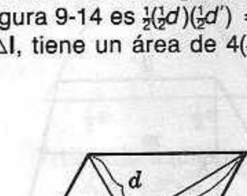
(*a*) Aquí, $b = 7.3$, $b' = 2.7$, $h = 3.8$. Entonces, $A = \frac{1}{2}h(b + b') = \frac{1}{2}(3.8)(7.3 + 2.7) = 19$.

(*b*) Aquí, $b = 22$, $b' = 10$, $AB = 10$. Además $EF = b' = 10$ y $AE = \frac{1}{2}(22 - 10) = 6$.
En el $\triangle BEA$, $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ por lo que $h = 8$. Entonces, $A = \frac{1}{2}h(b + b') = \frac{1}{2}(8)(22 + 10) = 128$.

(*c*) $AE = \sqrt{(AB)^2 - h^2} = \sqrt{64 - 48}$. Además, $FD = AE = 4$, y $b' = b - (AE + FD) = b - 8$.
Entonces, $A\ \frac{1}{2}h(b + b') = \frac{1}{2}h(2b - 8)$ o $52\sqrt{3} = \frac{1}{2}(4\sqrt{3})(2b - 8)$, de donde $26 = 2b - 8$ o $b = 17$. Entonces, $b' = b - 8 = 17 - 8 = 9$.

9.5 ÁREA DE UN ROMBO

El *área de un rombo es igual a la mitad del producto de las longitudes de sus diagonales*. Como cada diagonal es mediatriz de la otra, el área del triángulo I en la figura 9-14 es $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}d)(\frac{1}{2}d') = \frac{1}{8}dd'$. De manera que el rombo, que está formado por cuatro triángulos congruentes con el $\triangle$I, tiene un área de $4(\frac{1}{8}dd')$ o $\frac{1}{2}dd'$.



Rombo: $A = \frac{1}{2}dd'$

Fig. 9-14

PROBLEMAS RESUELTOS

9.8 Área de un Rombo

(*a*) Calcule el área de un rombo si una diagonal tiene longitud 30 y un lado tiene longitud 17.

(*b*) Determine la longitud de una diagonal de un rombo si la otra diagonal tiene longitud 8 y el área del rombo es 52.

Soluciones

Véase figura 9-15

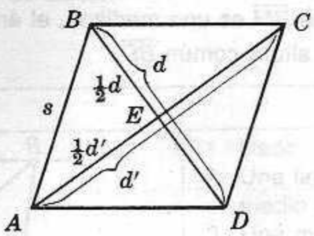


Fig. 9-15

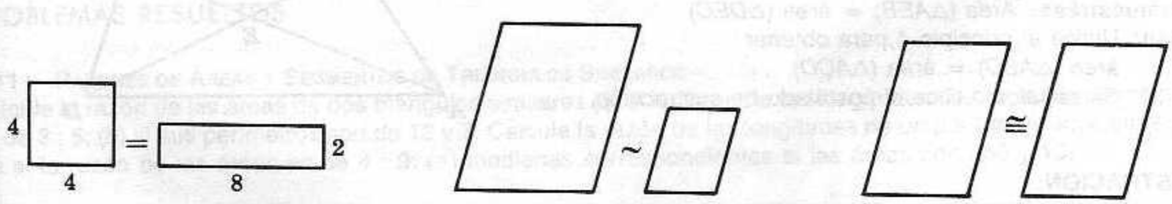
(*a*) En el $\triangle$ rectángulo *AEB*, $s^2 = (\frac{1}{2}d)^2 + (\frac{1}{2}d')^2$ ó $17^2 = (\frac{1}{2}d)^2 + 15^2$. Entonces, $\frac{1}{2}d = 8$ y $d = 16$. Por lo que $A = \frac{1}{2}dd' = \frac{1}{2}(16)(30) = 240$.

(*b*) Se tiene $d' = 8$ y $A = 52$. Entonces $A = \frac{1}{2}dd'$ ó $52 = \frac{1}{2}(d)(8)$ y $d = 13$.

9.6 POLÍGONOS DEL MISMO TAMAÑO O FORMA

La figura 9-16 muestra lo que se quiere decir cuando se expresa que dos polígonos son de área igual, o que son similares o congruentes.

Polígonos iguales **Polígonos similares** **Polígonos congruentes**



Los polígonos del mismo tamaño tienen la misma área

Los polígonos similares tienen la misma forma

Los polígonos congruentes tienen el mismo tamaño y la misma forma

Fig. 9-16

Principio 1: *dos paralelogramos tienen áreas iguales si tienen bases y alturas congruentes.*
Los dos paralelogramos que se muestran en la figura 9-17 son iguales.

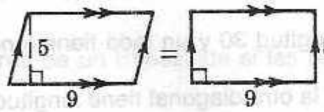


Fig. 9-17

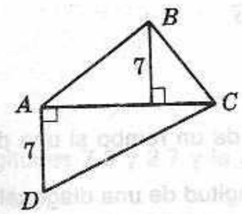


Fig. 9-18

Principio 2: *los triángulos tienen área igual si tienen bases y alturas congruentes.*
En la figura 9-18, el área del $\triangle CAB$ es igual al área del $\triangle CAD$.

Principio 3: *una mediana divide a un triángulo en dos triángulos de áreas iguales.*
De esta manera, en la figura 9-19, donde $\overline{BM}$ es una mediana, el área del $\triangle AMB$ es igual al área del $\triangle BMC$ ya que tienen bases congruentes ($\overline{AM} \cong \overline{MC}$) y altura común $\overline{BD}$.

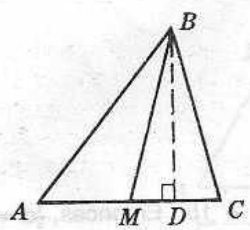


Fig. 9-19

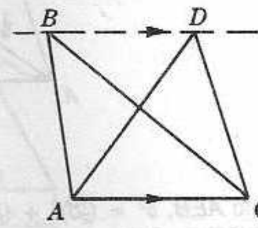
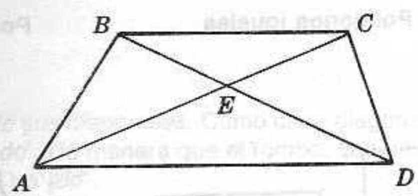


Fig. 9-20

Principio 4: *dos triángulos son iguales en área si tienen una base en común y sus vértices están sobre una línea paralela a la base.*
En la figura 9-20, el área del $\triangle ABC$ es igual al área del $\triangle ADC$.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.9 Resolución de un Problema Sobre Áreas Iguales



Dado: el trapezoide $ABCD$ ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$)
Diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$
Demuéstrese: Área ($\triangle AEB$) = área ($\triangle DEC$)
Plan: Utilice el principio 4 para obtener área ($\triangle ABD$) = área ($\triangle ACD$).
En seguida, utilice el postulado de sustracción.

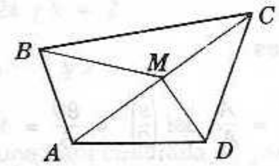
DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$	1. Dado
2. Área ($\triangle ABD$) = área ($\triangle ACD$)	2. Dos triángulos tienen igual área si tienen una base común y sus vértices están sobre una línea paralela a su base.
3. Área ($\triangle AED$) = área ($\triangle AED$)	3. Postulado de identidad
4. Área ($\triangle AED$) = área ($\triangle DEC$)	4. Postulado de sustracción

9.10 Resolución de un Problema Sobre Áreas Iguales Expresado en Palabras

Demuestre que si M es el punto medio de la diagonal $\overline{AC}$ en un cuadrilátero $ABCD$, y se trazan $\overline{BM}$ y $\overline{DM}$, entonces el área del cuadrilátero $ABMD$ es igual al área del cuadrilátero $CBMD$.

Solución



Dado: cuadrilátero $ABCD$
M punto medio de la diagonal $\overline{AC}$

Demuéstrese: El área del cuadrilátero $ABMD$ es igual al área del cuadrilátero $CBMD$.

Plan: utilice el principio 3 para obtener dos pares de triángulos que son iguales en área.
En seguida utilice el postulado de adición.

DEMOSTRACIÓN:

Proposiciones	Argumentos
1. M es el punto medio de $\overline{AC}$.	1. Dado
2. $\overline{BM}$ es una mediana del $\triangle ACB$.	2. Una línea desde el vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto es una mediana.
3. Área ($\triangle AMB$) = área ($\triangle BMC$). Área ($\triangle AMD$) = área ($\triangle DMC$)	3. Una mediana divide a un triángulo en dos triángulos de la misma área.
4. El área de cuadrilátero $ABMD$ es igual al área del cuadrilátero $CBMD$.	4. Si iguales se suman a iguales, los resultados son iguales

9.7 COMPARANDO ÁREAS DE POLÍGONOS SIMILARES

Las *áreas de polígonos similares son entre sí como los cuadrados de cualquiera de sus dos segmentos correspondientes.*

Así, si el $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ y el área del $\triangle ABC$ es 25 veces el área del $\triangle A'B'C'$, entonces la razón de las longitudes de cualquiera de los lados correspondientes, medianas, alturas, radios de círculos inscritos o circunscritos y otros, es de 5:1.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.11 Razones de Áreas y Segmentos de Triángulos Similares

Calcule la razón de las áreas de dos triángulos similares (*a*) si la razón de las longitudes de dos lados correspondientes es de 3 : 5; (*b*) si sus perímetros son de 12 y 7. Calcule la razón de las longitudes de un par de (*c*) lados correspondientes si la razón de las áreas es de 4 : 9; (*d*) medianas correspondientes si las áreas son 250 y 10.

Soluciones

(*a*) $\dfrac{A}{A'} = \left(\dfrac{s}{s'}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

(*b*) $\dfrac{A}{A'} = \left(\dfrac{p}{p'}\right)^2 = \left(\dfrac{12}{7}\right)^2 = \dfrac{144}{49}$

(*c*) $\left(\dfrac{s}{s'}\right)^2 = \dfrac{A}{A'} = \dfrac{4}{9}$ ó $\dfrac{s}{s'} = \dfrac{2}{3}$

(*d*) $\left(\dfrac{m}{m'}\right)^2 = \dfrac{A}{A'} = \dfrac{250}{10}$ ó $\dfrac{m}{m'} = 5$

9.12 PROPORCIONES DERIVADAS DE POLÍGONOS SIMILARES

(*a*) Las áreas de dos polígonos similares son 80 y 5. Si un lado del polígono menor tiene longitud 2, calcule la longitud del lado correspondiente en el polígono mayor.

(*b*) Las diagonales correspondientes de dos polígonos similares tienen longitud 4 y 5. Si el área del polígono mayor es 75, calcule el área del polígono menor.

Soluciones

(*a*) $\left(\frac{s}{s'}\right)^2 = \frac{A}{A'}$, así $\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{80}{5} = 16$. Entonces $\frac{s}{2} = 4$ y $s = 8$.

(*b*) $\frac{A}{A'} = \left(\frac{d}{d'}\right)^2$, así $\frac{A}{75} = \left(\frac{4}{5}\right)^2$. Entonces $A = 75\left(\frac{16}{25}\right) = 48$.

Problemas complementarios

1. Calcule el área de un rectángulo (9.1)

(*a*) Si la base tiene longitud 11 pulgadas y la altura tiene longitud 9 pulgadas.

(*b*) Si la base tiene longitud 2 pies y la altura tiene longitud 1 pie 6 pulgadas.

(*c*) Si la base tiene longitud 25 y el perímetro es 90.

(*d*) Si la base tiene longitud 15 y la diagonal tiene longitud 17.

(*e*) Si la diagonal tiene longitud 12 y el ángulo entre la diagonal y la base mide 60°.

(*f*) Si la diagonal tiene longitud 20 y el ángulo entre la diagonal y la base mide 30°.

(*g*) Si la diagonal tiene longitud 25 y las longitudes de los lados están en la razón de 3:4.

(*h*) Si el perímetro es 50 y las longitudes de los lados están en la razón de 2:3.

2. Calcule el área de un rectángulo inscrito en un círculo (9.1)

(*a*) Si el radio del círculo es 5 y la base tiene longitud 6.

(*b*) Si el radio del círculo es 15 y la altura tiene longitud 24.

(*c*) Si el radio y la altura tienen ambos longitud 5.

(*d*) Si el diámetro tiene longitud 26 y la base y la altura están en la razón de 5:12.

3. Calcule la base y la altura de un rectángulo (9.1)

(*a*) Si su área es 28 y la base tiene una longitud de 3 más que la altura.

(*b*) Si su área es 72 y la base es el doble de la altura.

(*c*) Si su área es 54 y la razón de la base con la altura es de 3:2.

(*d*) Si su área es 12 y el perímetro es 16.

(*e*) Si su área es 70 y la base y la altura están representadas por $2x$ y $x + 2$.

(*f*) Si su área es 160 y la base y altura están representadas por $3x - 4$ y x.

4. Calcule el área de (*a*) una yarda cuadrada en pulgadas cuadradas; (*b*) una bara cuadrada en yardas cuadradas (1 bara = $5\frac{1}{2}$ yardas); (*c*) un metro cuadrado en decímetros cuadrados (1 m = 10 dm). (9.2)

5. Calcule el área de un cuadrado si (*a*) un lado tiene longitud 15; (*b*) un lado tiene longitud $3\frac{1}{2}$; (*c*) un lado tiene longitud 1.8; (*d*) un lado tiene longitud $8a$; (*e*) el perímetro es 44; (*f*) el perímetro es 10; (*g*) el perímetro es $12b$; (*h*) la diagonal tiene longitud 8; (*i*) la diagonal tiene longitud 9; (*j*) la diagonal tiene longitud $8\sqrt{2}$ (9.2)

6. Encuentre el área de un cuadrado si (*a*) el radio del círculo circunscrito es 8; (*b*) el diámetro del círculo circunscrito es 12; (*c*) el diámetro del círculo circunscrito es $10\sqrt{2}$; (*d*) el radio del círculo inscrito es $3\frac{1}{2}$; (*e*) el diámetro del círculo inscrito es 20. (9.2)

7. Si un piso tiene 20 m de largo y 80 m de ancho, ¿cuántas losetas son necesarias para cubrirlo si (*a*) cada loseta mide 1 m²; (*b*) cada loseta es un cuadrado de 2 m por lado; (*c*) cada loseta es un cuadrado de 4 m por lado? (9.2)

8. Si el área de un cuadrado es 81, calcule la longitud de (*a*) su lado; (*b*) su perímetro; (*c*) su diagonal; (*d*) el radio del círculo inscrito; (*e*) el radio del círculo circunscrito. (9.2)

9. (*a*) Determine la longitud del lado de un cuadrado cuya área es $6\frac{1}{4}$ (9.2)

(*b*) Calcule el perímetro de un cuadrado cuya área es 169.

(*c*) Encuentre la longitud de la diagonal de un cuadrado cuya área es 50.

(*d*) Calcule la longitud de la diagonal de un cuadrado cuya área es 25.

(*e*). Determine el radio del círculo inscrito en un cuadrado cuya área es 144.

(*f*) Calcule el radio del círculo circunscrito en un cuadrado cuya área es 32.

10. Calcule el área de un paralelogramo si la base y la altura tienen longitudes, respectivamente, de (*a*) 3 pies y $5\frac{1}{3}$ pies; (*b*) 4 pies y 1 pie 6 pulgadas; (*c*) 20 y 3.5; (*d*) 1.8 m y 0.9 m. (9.3)

11. Calcule el área de un paralelogramo si la base y la altura tienen longitudes, respectivamente, de (*a*) $3x$ y x; (*b*) $x + 3$ y x; (*c*) $x - 5$ y $x + 5$; (*d*) $4x + 1$ y $3x + 2$ (9.3)

12. Determine el área de un paralelogramo si dos lados adyacentes tienen longitudes de (*a*) 15 y 20 e incluyen un ángulo que mide 30°; (*b*) 9 y 12 e incluyen un ángulo que mide 45°; (*c*) 14 y 8 e incluyen un ángulo que mide 60°;

(*d*) 10 y 12 e incluyen un ángulo que mide 150°; (*e*) 6 y 4 e incluyen un ángulo que mide 28°; (*f*) 9 y 10 e incluyen un ángulo que mide 38°.

13. Calcule el área de un paralelogramo si (9.3)

(*a*) El área está representada por x^2, la base por $x + 3$, y la altura por $x - 2$.

(*b*) El área está representada por $x^2 - 10$, la base por x, y la altura por $x - 2$.

(*c*) El área está representada por $2x^2 - 34$, la base por $x + 3$, y la altura por $x - 3$.

14. En un paralelogramo, encuentre (9.3)

(*a*) La base si el área es 40 y la altura tiene longitud 15.

(*b*) La longitud de la altura si el área es 22 y la base tiene longitud 1.1.

(*c*) La longitud de la base si el área es 27 y la base es tres veces la altura.

(*d*) La longitud de la altura si el área es 21 y la base tiene longitud cuatro más que la altura.

(*e*) La base si el área es 90 y la razón de la base a la altura es de 5:2.

(*f*) La longitud de la altura sobre un lado de longitud 20 si la altura sobre un lado de longitud 15 es 16.

(*g*) La longitud de la base si el área es 48, la base está representada por $x + 3$, y la altura por $x + 1$.

(*h*) La longitud de la base si el área está representada por $x^2 + 17$, la base por $2x - 3$, y la altura por $x + 1$

15. Calcule el área de un triángulo si las longitudes de la base y altura son, respectivamente, (*a*) 6 pulgadas y $3\frac{2}{3}$ pulgadas; (*b*) 1 yarda y 2 pies; (*c*) 8 y $x - 7$; (*d*) $5x$ y $4x$; (*e*) $4x$ y $x + 9$; (*f*) $x + 4$ y $x - 4$; (*g*) $2x - 6$ y $x + 3$. (9.4)

16. Encuentre el área de un triángulo si dos lados adyacentes tienen longitudes de (*a*) 8 y 5 e incluyen un ángulo que mide 30°; (*b*) 5 y 4 e incluyen un ángulo que mide 45°; (*c*) 8 y 12 e incluyen un ángulo que mide 60°; (*d*) 25 y 10 e incluyen un ángulo que mide 150°; (*e*) 20 y 5 e incluyen un ángulo que mide 36°; (*f*) 16 y 9 e incluyen un ángulo que mide 140°. (9.4)

17. Determine el área de un triángulo rectángulo si (*a*) los catetos tienen longitudes 5 y 6; (*b*) los catetos son iguales y la hipotenusa es 16; (*c*) el cateto opuesto al ángulo de 30° es 6; (*d*) un ángulo agudo mide 60° y la hipotenusa es 8; (*e*) sus lados son 6, 8, y 10; (*f*) la altura sobre la hipotenusa corta segmentos de 2 y 8. (9.4)

18. Calcule el área de (9.4)

(*a*) Un triángulo si dos lados tienen longitudes 13 y 15 y la altura sobre el tercer lado tiene longitud 12.

(*b*) Un triángulo cuyos lados tienen longitudes 10, 10, y 16.

(*c*) Un triángulo cuyos lados tienen longitudes 5, 12, y 13.

(*d*) Un triángulo isósceles cuya base tiene longitud 30 y cuyos lados tienen longitud 17.

(*e*) Un triángulo isósceles cuya base tiene longitud 20 y cuyo ángulo en el vértice mide 68°.

(*f*) Un triángulo isósceles cuya base tiene longitud 30 y cuyos ángulos de la base miden 62°.

(*g*) Un triángulo inscrito en un círculo de radio 4 si un lado es un diámetro y otro lado forma un ángulo de 30° con el diámetro.

(*h*) Un triángulo resultado del corte de una línea paralela a la base de un triángulo si la base y altura del triángulo mayor tienen longitudes 10 y 5, respectivamente, y la línea paralela a la base es 6.

19. Determine la altura de un triángulo si (9.4)

(*a*) Su base tiene longitud 10 y el triángulo es igual en área a un paralelogramo cuya base y altura tiene longitudes 15 y 8.

(*b*) Su base tiene longitud 8 y el triángulo es igual en área a un cuadrado cuya diagonal tiene longitud 4.

(*c*) Su base tiene longitud 12 y el triángulo es igual en área a otro triángulo cuyos lados tienen longitudes 6, 8 y 10.

20. En un triángulo, calcule la longitud de (9.4)

(*a*) Un lado si el área es 40 y la altura sobre este lado tiene longitud 10.

(*b*) Una altura si el área es 25 y el lado sobre el cual se traza la altura tiene longitud 5.

(*c*) Un lado si el área es 24 y el lado tiene longitud 2 más que la altura.

(*d*) Un lado si el área es 108 y el lado y su altura están en la razón de 3:2.

(*e*) La altura sobre un lado de longitud 20, si los lados del triángulo tienen longitudes 12, 16 y 20.

(*f*) La altura sobre un lado de longitud 12 si otro lado y su altura tienen longitudes 10 y 15.

(*g*) Un lado representado por $4x$ si la altura sobre este lado está representada por $x + 7$ y el área es 60.

(*h*) Un lado si el área está representada por $x^2 = 55$, el lado por $2x - 2$, y su altura por $x - 5$.

21. Determine el área de un triángulo equilátero si (*a*) un lado tiene longitud 10; (*b*) el perímetro es 36; (*c*) una altura tiene longitud 6; (*d*) una altura tiene longitud $5\sqrt{3}$; (*e*) un lado tiene longitud $2b$; (*f*) el perímetro es $12x$; (*g*) una altura tiene longitud $3r$. (9.6)

22. Calcule el área de un rombo que tiene un ángulo de 60° si (*a*) un lado tiene longitud 2; (*b*) la diagonal menor tiene longitud 7; (*c*) la diagonal mayor tiene longitud 12; (*d*) la diagonal mayor tiene longitud $6\sqrt{3}$. (9.6)

23. Encuentre el área de un hexágono regular si (*a*) un lado es 4; (*b*) el radio del círculo circunscrito es 6; (*c*) el diámetro del círculo circunscrito es 20. (9.6)

24. Determine el lado de un triángulo equilátero cuya área es igual (9.6)

(*a*) La suma de las áreas de dos triángulos equiláteros cuyos lados tienen longitudes 9 y 12.

(*b*) La diferencia de las áreas de dos triángulos equiláteros cuyos lados tienen longitudes 17 y 15.

(*c*) El área de un trapezoide cuyas bases tienen longitudes 6 y 2 y cuya altura tiene longitud $9\sqrt{3}$.

(*d*) Dos veces el área de un triángulo rectángulo que tiene una hipotenusa de longitud 5 y un ángulo agudo que mide 30°.

25. Calcule el área del trapezoide *ABCD* en la figura 9-21 si: (9.7)

(*a*) $b = 25$, $b' = 15$, y $h = 7$

(*b*) $m = 10$ y $h = 6.9$

(*c*) $AB = 30$, $m\angle A = 30°$, $b = 24$, y $b' = 6$

(*d*) $AB = 12$, $m\angle A = 45°$, $b = 13$, y $b' = 7$

(*e*) $AB = 10$, $m\angle A = 70°$, y $b + b' = 20$

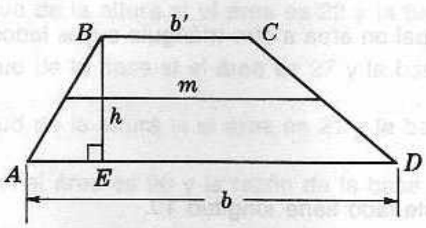


Fig. 9-21

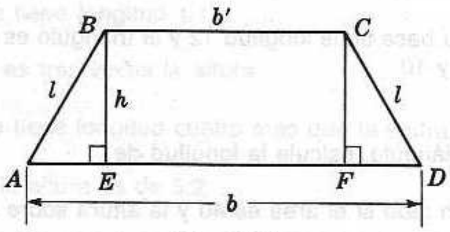


Fig. 9-22

26. Calcule el área del trapezoide isósceles en la figura 9-22 si: (9.7)

(*a*) $b' = 17$, $l = 10$, y $h = 6$

(*b*) $b = 22$, $b' = 12$, y $l = 13$

(*c*) $b = 16$, $b' = 10$, y $m\angle A = 45°$

(*d*) $b = 20$, $l = 8$, y $m\angle A = 60°$

(*e*) $b = 40$, $b' = 20$, y $m\angle A = 28°$

27. (*a*) Determine la longitud de la altura de un trapezoide si las bases tienen longitudes 13 y 7 y el área es 40. (9.7)

(*b*) Calcule la longitud de la altura de un trapezoide si la suma de las longitudes de las bases es el doble de la longitud de la altura y el área es 49.

(*c*) Encuentre la suma de las longitudes de las bases y la mediana de un trapeziode si el área es 63 y la altura tiene longitud 7.

(*d*) Determine las longitudes de las bases de un trapezoide si la base superior tiene longitud 3 menos que la base inferior, la altura tiene longitud 4 y el área es 30.

(*e*) Calcule las longitudes de las bases de un trapezoide si la base inferior tiene longitud el doble de la base superior, la altura tiene longitud 6, y el área es 45.

28. En un trapezoide isósceles: (9.7)

(*a*) Encuentre las longitudes de las bases si cada lado tiene longitud 5, la altura tiene longitud 3, y el área es 39.

(*b*) Encuentre las longitudes de las bases si la altura tiene longitud 5, cada ángulo de la base mide 45°, y el área es 90°.

(*c*) Calcule las longitudes de las bases si el área es $42\sqrt{3}$, la altura tiene longitud $3\sqrt{3}$, y cada ángulo de la base mide 60°.

(*d*) Encuentre la longitud de cada lado si las bases tienen longitudes 24 y 32 y el área es 84.

(*e*) Determine la longitud de cada lado si el área es 300, la mediana tiene longitud 25, y la base menor tiene longitud 30.

29. Calcule el área de un rombo si (9.8)

(*a*) Las diagonales tiene longitudes 8 y 9.

(*b*) Las diagonales tienen longitudes 11 y 7.

(*c*) Las diagonales tienen longitudes 4 y $6\sqrt{3}$.

(*d*) Las diagonales tienen longitudes $3x$ y $8x$.

(*e*) Una diagonal tiene longitud 10 y un lado tiene longitud 13.

(*f*) El perímetro es 40 y una diagonal tiene longitud 12.

(*g*) El lado tiene longitud 6 y un ángulo mide 30°.

(*h*) El perímetro es 28 y un ángulo mide 45°.

(*i*) El perímetro es 32 y la longitud de la diagonal menor es igual a la de un lado.

(*j*) Un lado tiene longitud 14 y un ángulo mide 120°.

30. Calcule el área de un rombo redondeando al entero más próximo si (*a*) el lado tiene longitud 30 y un ángulo mide 55°; (*b*) el perímetro es 20 y un ángulo mide 33°; (*c*) el lado tiene longitud 10 y un ángulo mide 130°. (9.8)

31. En un rombo, calcule la longitud de: (9.8)

(*a*) Una diagonal si la otra diagonal tiene longitud 7 y el área es 35.

(*b*) Las diagonales si su razón es de 4:3 y el área es 54.

(*c*) Las diagonales si la mayor es el doble de la menor y el área es 100.

(*d*) El lado si el área es 24 y una diagonal tiene longitud 6.

(*e*) El lado si el área es 6 y una diagonal tiene longitud 4 más que la otra.

32. Un rombo es igual a un trapezoide cuya base inferior tiene longitud 26 y cuyos otros tres lados tienen longitud 10. Calcule la longitud de la altura del rombo si su perímetro es 36. (9.8)

33. Demuestre lo que se pide en la figura 9-23. (9.9)

(*a*) **Dado:** $\triangle ABC$
$DB = \frac{1}{3}AB$
$EC = \frac{1}{3}AC$
Demuéstrese: Área ($\triangle DFB$) = área ($\triangle FEC$)

(*b*) **Dado:** Trapezoide *ABCD*
Extendiendo $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se encuentran en *E*
Demuéstrese: (Área $\triangle ECA$) = área ($\triangle EBD$)

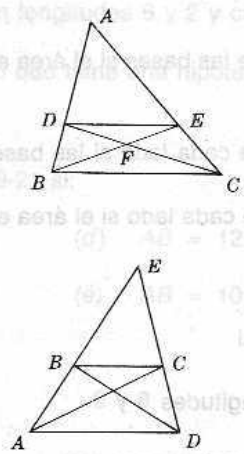


Fig. 9-23

34. Demuestre lo que se pide en la figura 9-24. (9.9)

(*a*) **Dado:** $\square ABCD$
E es el punto medio de $\overline{CD}$
Demuéstrese: Área ($\square ABCD$) = área (trapezoide *BFGA*)

(*b* **Dado:** $\square ABCD$
$\overline{BE}$ y $\overline{CF} \perp \overline{AF}$.
Demuéstrese: *BCFE* es un rectángulo y es igual al área del $\square ABCD$.

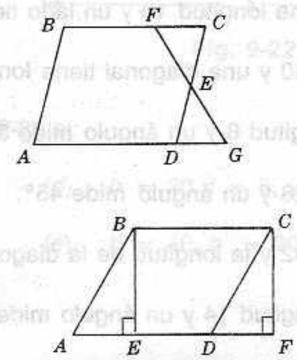


Fig. 9-24

35. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados: (9.10)

(*a*) Una mediana divide a un triángulo en dos triángulos que tienen áreas iguales.

(*b*) Dos triángulos son iguales en área si tienen una base común y sus vértices están sobre una línea paralela a su base.

(*c*) En un triángulo, si se trazan líneas desde un vértice a los puntos que trisectan el lado opuesto, el área del triángulo es trisectada.

(*d*) En el trapezoide *ABCD*, la base $\overline{AD}$ es el doble de la base $\overline{BC}$. Si *M* es el punto medio de $\overline{AD}$, entonces *ABCM* y *BCDM* son paralelogramos iguales en área.

36. (*a*) En el $\triangle ABC$, *E* es un punto sobre $\overline{BM}$, la medianasobre $\overline{AC}$.Demuestre que el área ($\triangle BEA$) = área ($\triangle BEC$).

(*b*) En el triángulo $\triangle ABC$, Q es un punto sobre $\overline{BC}$, M es el punto medio de $\overline{AB}$, y P es el punto medio de $\overline{AC}$. Demuestre que el área ($\triangle BQM$) + área ($\triangle PQC$) = área (cuadrilátero $APQM$).

(*c*) En el cuadrilátero $ABCD$, la diagonal $\overline{AC}$ bisecta a la diagonal $\overline{BD}$. Demuestre que el área ($\triangle ABC$) = área ($\triangle ACD$).

(*d*) Demuestre que las diagonales de un paralelogramo dividen al paralelogramo en cuatro triángulos que son iguales en área. (9.10)

37. Calcule la razón de las áreas de dos triángulos similares si la razón de dos lados correspondientes es de (*a*) 1:7; (*b*) 7:2; (*c*) $1:\sqrt{3}$; (*d*) $a:5a$; (*e*) $9:x$; (*f*) $3:\sqrt{x}$; (*g*) $s:s\sqrt{2}$. (9.11)

38. Calcule la razón de las áreas de dos triángulos similares (9.11)

(*a*) Si la razón de las longitudes de dos medianas correspondientes es de 7:10.

(*b*) Si la longitud de una altura del primero es dos tercios de la altura correspondiente del segundo.

(*c*) Si dos bisectrices correspondientes tienen longitudes 10 y 12.

(*d*) Si la longitud de cada lado del primero es un tercio de la longitud de cada lado correspondiente del segundo.

(*e*) Si los radios de sus círculos circunscritos son $7\frac{1}{2}$ y 5.

(*f*) Si sus perímetros son 30 y $30\sqrt{2}$.

39. Calcule la razón de dos lados correspondientes cualesquiera de dos triángulos semejantes si la razón de su área es de (*a*) 100:1; (*b*) 1:49; (*c*) 400:81; (*d*) 25:121; (*e*) $4:y^2$; (*f*) $9x^2:1$; (*g*) 3:4; (*h*) 1:2; (*i*) $x^2:5$; (*j*) $x:16$. (9.11)

40. En dos triángulos similares, calcule la razón de las longitudes de (9.11)

(*a*) Los lados correspondientes si las áreas son 72 y 50.

(*b*) Las correspondientes medianas si la razón de sus áreas es de 9:49.

(*c*) Las alturas correspondientes si las áreas son 18 y 6.

(*d*) Los perímetros si las áreas son 50 y 40.

(*e*) Los radios de los círculos inscritos si la razón de las áreas es de 1:3.

41. Las áreas de dos triángulos similares están en la razón de 25:16. Calcule (9.11)

(*a*) La longitud de un lado del mayor si el lado correspondiente en el menor tiene longitud 80.

(*b*) La longitud de una mediana del mayor si la mediana correspondiente del menor tiene longitud 10.

(*c*) La longitud de una bisectriz del menor si la bisectriz correspondiente del mayor tiene longitud 15.

(*d*) El perímetro del menor si el perímetro del mayor es 125.

(*e*) La circunferencia del círculo inscrito al mayor si la circunferencia inscrita al menor es 84.

(*f*) El diámetro del círculo circunscrito al menor si el diámetro del círculo circunscrito al mayor es 22.5.

(*g*) La longitud de una altura si la altura correspondiente de menor tiene longitud $16\sqrt{3}$.

42. (*a*) Las áreas de dos triángulos similares son 36 y 25. Si una mediana del triángulo menor tiene longitud 10, calcule la longitud de la mediana correspondiente del mayor. (9.12)

(*b*) Las alturas correspondientes de dos triángulos similares tienen longitudes 3 y 4. Si el área del triángulo mayor es 112, calcule el área del menor.

(*c*) Dos polígonos similares tienen perímetros de 32 y 24. Si el área del menor es 27, calcule el área delmayor.

(*d*) Las áreas de dos pentágonos similares son 88 y 22. Si una diagonal del mayor tiene longitud 5, calcule la longitud de la diagonal correspondiente del menor.

(*e*) En dos polígonos similares, la razón de las longitudes de dos lados correspondientes es de $\sqrt{3}$:1. Si el área del menor es 15, calcule el área del mayor.